

TD₁₀ – Fonctions vectorielles, Courbes**Exercice 1** ★

Soit I un intervalle, E un espace vectoriel euclidien et $f : I \rightarrow E$ dérivable. On suppose de plus que f ne s'annule pas et on pose, pour tout $t \in I$, $g(t) = \|f(t)\|$. Démontrer que g est dérivable et donner une expression de g' .

Exercice 2 ★★

Soit V une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $t \mapsto \|V(t)\|$ soit constante.

1. Montrer que, pour tout réel t , $V(t)$ et $V'(t)$ sont orthogonaux.
2. Que dire de la réciproque ?

Exercice 3 ★

Soit $A(-1, 2)$ et $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$. On note D la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique de D .

Exercice 4 ★

On considère le cercle $\mathcal{C}$ défini par l'équation $(x-1)^2 + (y+1)^2 = R^2$, où $R > 0$. Donner un paramétrage de ce cercle.

Exercice 5 ★

Soit $M(x, y)$ un point du plan et D la droite d'équation $2x + 3y = 5$

Déterminer le projeté orthogonal de M sur D

Exercice 6 ★★★

On considère la courbe paramétrée définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \cos(t)^2 \\ y(t) = \sin(t) + \cos(t)\sin(t) \end{cases}$

1. Déterminer les éventuelles réductions du domaine d'étude et leurs conséquences sur le support de la courbe
2. Étudier les variations de x et y et dresser le tableau des variations conjointes
3. Rechercher les éventuelles asymptotes ou directions asymptotiques
4. Étudier les éventuels points singuliers et leurs natures
5. Tracer une allure du support.

Exercice 7 ★★★

Étudier et tracer les courbes paramétrées par $(t \in I$ où I est à déterminer) :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \frac{\cos^2 t}{2 - \cos t} \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} x(t) = \frac{t^2 + 1}{2t - 1} \\ y(t) = \frac{2t - 1}{t^2} \end{cases} & \text{e) } \begin{cases} x(t) = \frac{\ln |t|}{t - 1} \\ y(t) = \ln \left| t + \frac{1}{t} \right| \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} x(t) = \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \\ y(t) = 2\sin(t) + \cos(2t) \end{cases} \end{array}$$

Pour le a) et le b), on déterminera les points doubles.

Exercice 8 ★★

On considère la courbe Γ donné par $M(t) : \begin{cases} x(t) = \arccos(\cos t) \\ y(t) = \arcsin(\sin t) \end{cases}$

Comment passe-t-on du point $M(t)$ au point $M(t + 2\pi)$? au point $M(-t)$? au point $M(\pi - t)$? Construire alors Γ .

Exercice 9 ★★★

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on se donne les deux courbes $(\Gamma_1) : \begin{cases} x(t) = 5 \cos t - \cos 5t \\ y(t) = 5 \sin t - \sin 5t \end{cases}$

et $(\Gamma_2) : \begin{cases} x(\theta) = 4 \cos\left(\frac{2\theta}{3}\right) \cos(\theta) \\ y(\theta) = 4 \cos\left(\frac{2\theta}{3}\right) \sin(\theta) \end{cases}.$

1. Étudier (Γ_1) .
2. Montrer que lorsque $M(t)$ décrit (Γ_1) , le projeté orthogonal $H(t)$ de O sur la normale à (Γ_1) en $M(t)$ décrit la courbe (Γ_2) .

Exercice 10 ★★★

Soit Γ la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t-t^3}{1+t^2} \end{cases}$

1. Construire Γ .
2. Former une équation cartésienne de Γ .
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que trois points de Γ , de paramètres t_1, t_2 et t_3 soient alignés.

Exercice 11 ★★★★★

Soit Γ la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 2t \end{cases}$. On appelle *podaire* de Γ par rapport à un point P du plan l'ensemble des projetés orthogonaux sur les tangentes à Γ .

1. Donner une équation cartésienne de Γ et la tracer
2. Soit $M(t)$ un point de Γ . Déterminer une équation de la tangente à Γ en M
3. Soit F le point de coordonnées $(1, 0)$. Vérifier que la podaire de Γ par rapport à F est une droite.
4. Déterminer et tracer la podaire γ de Γ par rapport à l'origine $O(0, 0)$.

Exercices issus d'oraux

Exercice 12 ★★

(Oral 2017)

Soit $\mathcal{C}$ paramétrée par $x(t) = \sin^2(t)$ et $y(t) = (1 + \cos(t)) \sin(t)$

1. Étudier et tracer $\mathcal{C}$
2. Soit M_1 de coordonnées $(x(t), y(t))$ et M_2 de coordonnées $(x(t + \pi), y(t + \pi))$. Montrer que $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sont orthogonaux
3. Donner une équation paramétrée $(X(t), Y(t))$ du lieu (D) des milieux des segments $[M_1M_2]$
4. Simplifier $\left(X(t) - \frac{1}{2}\right)^2 + Y(t)^2$ et en déduire une équation cartésienne de D ainsi que sa nature.

Exercice 13 ★★★

(Oral 2017)

Soit $\mathcal{P}$ paramétrée par $x(t) = \frac{t^2}{2}$ et $y(t) = t$

1. Tracer $\mathcal{P}$
2. Déterminer une équation de la tangente T_t à $\mathcal{P}$ au point de paramètre t .
3. Déterminer le projeté orthogonal de $A(0, 1)$ sur cette tangente. On le notera $N(t)$
4. Étudier le comportement asymptotique de la courbe décrite par $N(t)$

Exercice 14 ★★★

(Oral 2018)

Soit Γ la courbe paramétrée par
$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$

1. Déterminer le domaine de définition de Γ
2. Étudier les points stationnaires
3. Étudier les branches infinies
4. Tracer l'allure de la courbe.